

Survol de la dendricité et de l'ultime dendricité

France Gheeraert

5 avril 2024

Radboud Universiteit



Définition

Soit un A un ensemble fini. Un *sous-shift* est un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ qui est

- fermé pour la topologie produit,
- stable pour la dynamique $S : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Définition

Soit un A un ensemble fini. Un *sous-shift* est un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ qui est

- fermé pour la topologie produit,
- stable pour la dynamique $S : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Un sous-shift est *minimal* si les seuls sous-shifts qu'il contient sont lui-même et \emptyset .

Définition

Soit un A un ensemble fini. Un *sous-shift* est un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ qui est

- fermé pour la topologie produit,
- stable pour la dynamique $S : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Un sous-shift est *minimal* si les seuls sous-shifts qu'il contient sont lui-même et \emptyset .

Exemple :

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\}$$

est un sous-shift qui n'est pas minimal.

Définition

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift X est $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Définition

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift X est $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Exemple : Si

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\},$$

alors $\mathcal{L}(X) = \{w \in \{0, 1\}^* \text{ contenant au plus un } 1\}$.

Définition

Le *langage* de $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$\mathcal{L}(x) = \{w : \exists i \leq j \text{ tq. } w = x_i \cdots x_j\}.$$

Le *langage* d'un sous-shift X est $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}(x)$.

Exemple : Si

$$X = \{S^i(\cdots 000.1000 \cdots) : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\cdots 000.000 \cdots\},$$

alors $\mathcal{L}(X) = \{w \in \{0, 1\}^* \text{ contenant au plus un } 1\}$.

Définition

La *complexité* de $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est

$$p_X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \#(\mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^n).$$

Théorème (Morse, Hedlund)

Soit X un sous-shift minimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 X est périodique ;
- 2 il existe C tel que $p_X \leq C$;
- 3 il existe N tel que $p_X(N) \leq N$.

Théorème (Morse, Hedlund)

Soit X un sous-shift minimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 X est périodique ;
- 2 il existe C tel que $p_X \leq C$;
- 3 il existe N tel que $p_X(N) \leq N$.

Définition

Un sous-shift est *Sturmien* s'il est minimal et $p_X(n) = n + 1$ pour tout n .

... 10010011001001001101100 ...

$\mathcal{E}_X(10)$

Graphes d'extensions

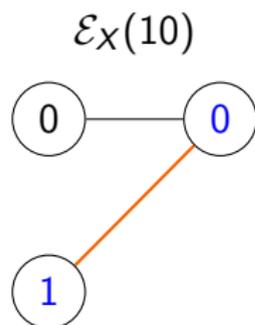
... 10010011001001001101100 ...

$\mathcal{E}_X(10)$



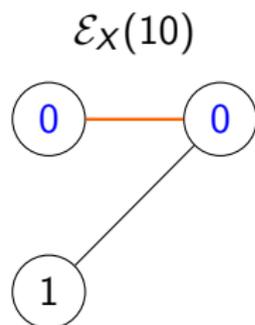
Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100 ...



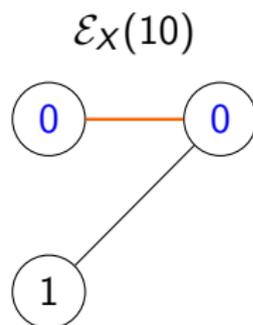
Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100...



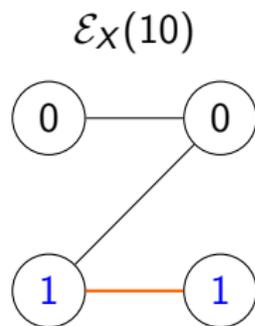
Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100 ...



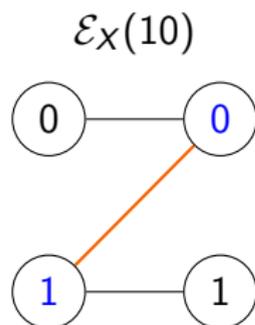
Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100...

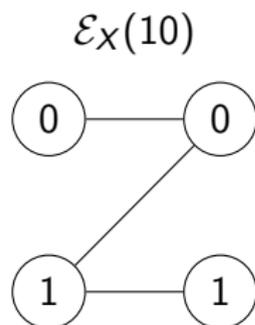


Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100...

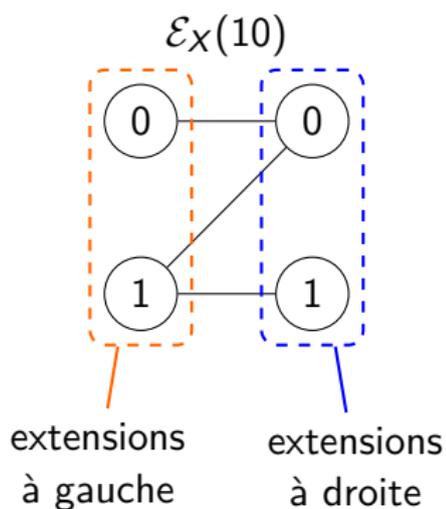


... 10010011001001001101100 ...



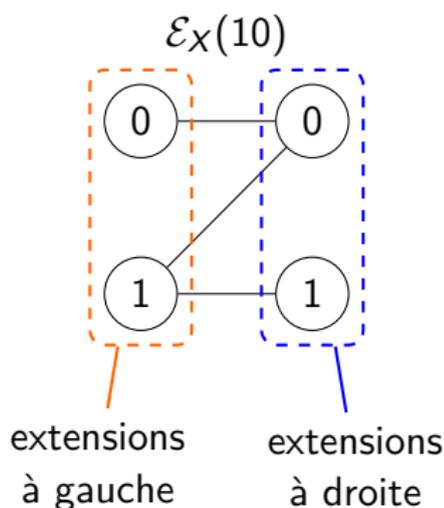
Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100 ...



Graphes d'extensions

... 10010011001001001101100 ...



Notations :

$$EG_X(w) = \{a : aw \in \mathcal{L}(X)\}$$

$$ED_X(w) = \{b : wb \in \mathcal{L}(X)\}$$

$$E_X(w) = \{(a, b) : awb \in \mathcal{L}(X)\}$$

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift X est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift X est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

Proposition

- *Tout sous-shift Sturmien est dendrique.*

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un sous-shift X est *dendrique* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont dendriques.

Proposition

- *Tout sous-shift Sturmien est dendrique.*
- *Tout sous-shift d'Arnoux-Rauzy (ou épisturmien strict) est dendrique.*
- *Tout codage d'échange d'intervalles régulier est dendrique.*

Proposition

Si X est dendrique avec d lettres, alors $p_X(n) = (d - 1)n + 1$.

Proposition

Si X est dendrique avec d lettres, alors $p_X(n) = (d - 1)n + 1$.

Proposition (Cassaigne)

Soit $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$s_X(n+1) - s_X(n) = \sum_{w \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^n} \# E_X(w) - \# EG_X(w) - \# ED_X(w) + 1$$

où $s_X(n) = p_X(n + 1) - p_X(n)$.

Définition

Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *neutre* si

$$\# E_X(w) - \# EG_X(w) - \# ED_X(w) + 1 = 0.$$

Un sous-shift X est *neutre* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont neutres.

Définition

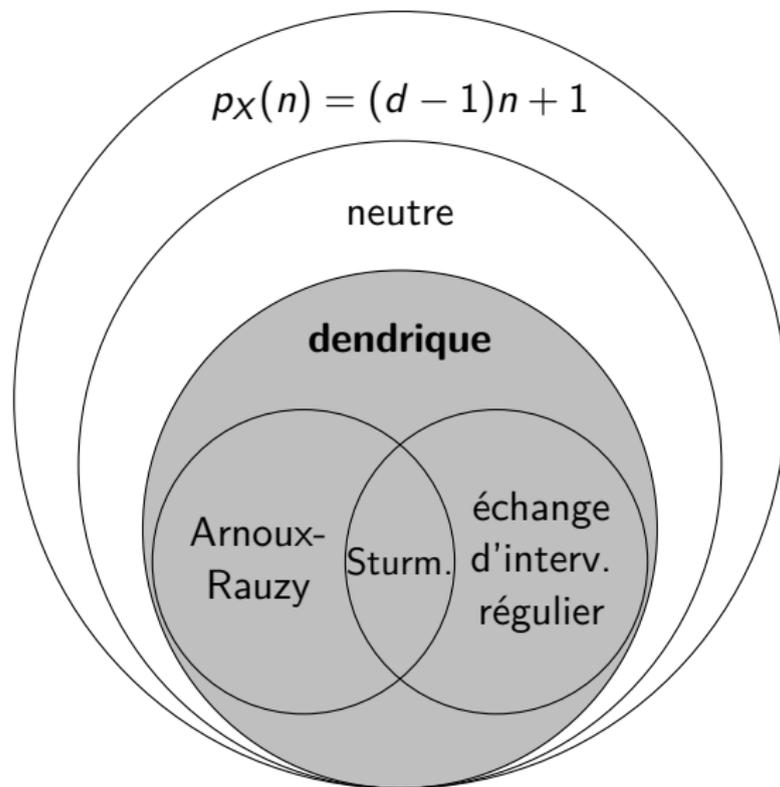
Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est *neutre* si

$$\# E_X(w) - \# EG_X(w) - \# ED_X(w) + 1 = 0.$$

Un sous-shift X est *neutre* si tous les mots $w \in \mathcal{L}(X)$ sont neutres.

Proposition

- *Tout sous-shift dendrique est neutre.*
- *Si X est neutre avec d lettres, alors $p_X(n) = (d - 1)n + 1$.*



Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 10010011001001001101100 \dots$

alors $R_X(10) =$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

... 10010011001001001101100 ...

alors $R_X(10) = \{100\}$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 10010011001001001101100 \dots$

alors $R_X(10) = \{100, 1001\}$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 10010011001001001101100 \dots$

alors $R_X(10) = \{100, 1001\}$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 10010011001001001101100 \dots$

alors $R_X(10) = \{100, 1001\}$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 100100110010010010011001101100 \dots$

alors $R_X(10) = \{100, 1001\}$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 10010011001001001101100 \dots$

alors $R_X(10) = \{100, 1001, 101\}$

Définition

Un *mot de retour* pour $w \in \mathcal{L}(X)$ non vide est un mot u tel que $uw \in \mathcal{L}(X)$ et w est un préfixe et un suffixe de uw (et c'est tout).

L'ensemble des mots de retour pour w est noté $R_X(w)$.

Exemple :

$\dots 10010011001001001101100 \dots$

alors $R_X(10) = \{100, 1001, 101, \dots\}$.

Théorème (Balková, Pelantová, Steiner)

Si X est neutre minimal avec d lettres, alors $\# R_X(w) = d$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$.

Théorème (Balková, Pelantová, Steiner)

Si X est neutre minimal avec d lettres, alors $\# R_X(w) = d$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$.

Théorème (Berthé et al.)

Si X est dendrique minimal sur l'alphabet \mathcal{A} , alors $R_X(w)$ est une base du groupe libre sur \mathcal{A} pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$.

Définition

Soient X minimal, $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ et $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow R_X(w)$ une bijection.

Le *dérivé* de X par rapport à w est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1) \cdots \in X\}.$$

Définition

Soient X minimal, $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ et $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow R_X(w)$ une bijection.

Le *dérivé* de X par rapport à w est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}) \cdot \sigma(y_0) \sigma(y_1) \cdots \in X\}.$$

Théorème (Berthé *et al.*)

- *Tout dérivé d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique minimal.*

Définition

Soient X minimal, $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ et $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow R_X(w)$ une bijection.

Le *dérivé* de X par rapport à w est

$$D_w(X) = \{y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} : \cdots \sigma(y_{-1}).\sigma(y_0)\sigma(y_1)\cdots \in X\}.$$

Théorème (Berthé *et al.*)

- *Tout dérivé d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique minimal.*
- *Tout décodage bifix maximal d'un sous-shift dendrique minimal est dendrique.*

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}) \cdot \sigma(x_0) \sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}) \cdot \sigma(x_0) \sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour* (pour w) s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma|_X : X \rightarrow R_X(w)$ est une bijection.

Dendricité et instabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}) \cdot \sigma(x_0) \sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour* (pour w) s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma|_X : \mathcal{B} \rightarrow R_X(w)$ est une bijection.

Proposition

Soient X minimal et σ un morphisme de retour pour w .

- $\sigma(X)$ dendrique $\Rightarrow X$ dendrique [Berthé et al.] ;

Dendricité et instabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}) \cdot \sigma(x_0) \sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour* (pour w) s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma|_X : X \rightarrow R_X(w)$ est une bijection.

Proposition

Soient X minimal et σ un morphisme de retour pour w .

- $\sigma(X)$ dendrique $\Rightarrow X$ dendrique [Berthé et al.] ;
- X dendrique $\not\Rightarrow \sigma(X)$ dendrique

Dendricité et instabilité

Définition

Un *morphisme* est une application $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ étendue par :

- $\sigma(w_1 \cdots w_n) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n)$,
- $\sigma(\cdots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots) = \cdots \sigma(x_{-1}) \cdot \sigma(x_0) \sigma(x_1) \cdots$,
- $\sigma(X) = \{S^k(\sigma(x)) : x \in X, k < |\sigma(x_0)|\}$.

C'est un *morphisme de retour* (pour w) s'il existe un sous-shift X tel que $\sigma|_X : X \rightarrow R_X(w)$ est une bijection.

Proposition

Soient X minimal et σ un morphisme de retour pour w .

- $\sigma(X)$ dendrique $\Rightarrow X$ dendrique [Berthé et al.];
- X dendrique $\not\Rightarrow \sigma(X)$ dendrique mais il existe un critère "simple" pour savoir quand c'est le cas [G., Leroy].

Dendricité et **instabilité** (2)

Proposition (G.)

Un morphisme σ est tel que (X dendrique $\Rightarrow \sigma(X)$ dendrique) si et seulement si c'est, à codage bijectif près, une composition de morphismes d'Arnoux-Rauzy, i.e. de morphismes

$$L_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{cases} \quad \forall b \neq a \qquad R_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{cases} \quad \forall b \neq a .$$

Dendricité et **instabilité** (2)

Proposition (G.)

Un morphisme σ est tel que (X dendrique $\Rightarrow \sigma(X)$ dendrique) si et seulement si c'est, à codage bijectif près, une composition de morphismes d'Arnoux-Rauzy, i.e. de morphismes

$$L_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{cases} \quad \forall b \neq a \qquad R_a : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{cases} \quad \forall b \neq a.$$

Corollaire (G.)

Un morphisme sur 3 lettres ou plus est tel que (X codage de RIET $\Rightarrow \sigma(X)$ codage de RIET) si et seulement si c'est un codage bijectif.

Isomorphisme

Définition

Deux sous-shifts X et Y sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$ qui soit continue et respecte la dynamique.

Définition

Deux sous-shifts X et Y sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$ qui soit continue et respecte la dynamique.

De façon équivalente ([Curtis, Hedlund, Lyndon]), s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$ pour laquelle il existe $N \geq 1$, $k < N$ and un codage θ tels que, pour tout $x \in X$,

$$\varphi(x) = S^{-k}\theta(x^{(N)})$$

où $x^{(N)} = (x_n \cdots x_{n+N-1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Définition

Deux sous-shifts X et Y sont *isomorphes* (ou *conjugués*) s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$ qui soit continue et respecte la dynamique.

De façon équivalente ([Curtis, Hedlund, Lyndon]), s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$ pour laquelle il existe $N \geq 1$, $k < N$ and un codage θ tels que, pour tout $x \in X$,

$$\varphi(x) = S^{-k}\theta(x^{(N)})$$

où $x^{(N)} = (x_n \cdots x_{n+N-1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Autrement dit, tout isomorphisme peut-être décomposé en

- 1 l'isomorphisme naturel entre X et un certain

$$X^{(N)} := \{x^{(N)} : x \in X\},$$

- 2 un codage entre $X^{(N)}$ et Y , injectif sur $X^{(N)}$.

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ pour un $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ bien choisi ;

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ pour un $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ bien choisi si $w \neq \varepsilon$;
- si $w = \varepsilon$, alors $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$.

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ pour un $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ bien choisi si $w \neq \varepsilon$;
- si $w = \varepsilon$, alors $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$.

Si $N \geq 2$, alors le graphe d'extension de ε dans $X^{(N)}$ n'est pas connexe.

Proposition

Soit $w \in \mathcal{L}(X^{(N)})$.

- $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \mathcal{E}_X(v)$ pour un $v \in \mathcal{L}_{N+|w|-1}(X)$ bien choisi *si* $w \neq \varepsilon$;
- si $w = \varepsilon$, alors $\mathcal{E}_{X^{(N)}}(w) \cong \sqcup_{v \in \mathcal{L}_{N-1}(X)} \mathcal{E}_X(v)$.

Si $N \geq 2$, alors le graphe d'extension de ε dans $X^{(N)}$ n'est pas connexe.

Corollaire

La famille des sous-shifts dendriques n'est pas stable par isomorphisme.

Définition (Dolce, Perrin)

Un sous-shift X est *ultimement dendrique* s'il existe N tel que tous les mots de longueur au moins N dans $\mathcal{L}(X)$ sont dendriques. Le minimal tel N est appelé *seuil*.

Définition (Dolce, Perrin)

Un sous-shift X est *ultimement dendrique* s'il existe N tel que tous les mots de longueur au moins N dans $\mathcal{L}(X)$ sont dendriques. Le minimal tel N est appelé *seuil*.

Proposition

- *Tout sous-shift dendrique est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift périodique est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift quasi-Sturmien est ultimement dendrique.*
- *Tout sous-shift 1-équilibré est ultimement dendrique [Dolce, Dvořáková, Pelantová].*

Proposition (Dolce & Perrin, G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 *X est ultimement ordinaire à droite de seuil K ;*
- 2 *X est ultimement dendrique de seuil L ;*
- 3 *X est ultimement neutre de seuil M ;*
- 4 *X est ultimement acyclique de seuil M' ;*
- 5 *X est ultimement faible ou neutre de seuil N .*

De plus, $K \geq L \geq M, M' \geq N$.

Proposition (Dolce & Perrin, G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- ① X est ultimement ordinaire à droite de seuil K ;

ordinaire à droite :

$$\exists a \text{ tq. } EG_X(wa) = EG_X(w) \text{ et } \forall b \neq a, \# EG_X(wb) \leq 1$$

- ② X est ultimement dendrique de seuil L ;

- ③ X est ultimement neutre de seuil M ;

- ④ X est ultimement acyclique de seuil M' ;

acyclique : $\mathcal{E}_X(w)$ est acyclique

- ⑤ X est ultimement faible ou neutre de seuil N .

faible ou neutre : $\# E_X(w) \leq \# EG_X(w) + \# ED_X(w) - 1$

De plus, $K \geq L \geq M, M' \geq N$.

Proposition (G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 *X est ultimement dendrique de seuil L ;*
- 2 *X est ultimement connexe de seuil M et $p_X(n) \in O(n)$;*
- 3 *X est ultimement fort ou neutre de seuil N et $p_X(n) \in O(n)$.*

De plus, $L \geq M \geq N$.

Ultime dendricité et compagnie (2)

Proposition (G.)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 X est ultimement dendrique de seuil L ;
- 2 X est ultimement connexe de seuil M et $p_X(n) \in O(n)$;
connexe : $\mathcal{E}_X(w)$ est connexe
- 3 X est ultimement fort ou neutre de seuil N et $p_X(n) \in O(n)$.
fort ou neutre : $\# E_X(w) \geq \# EG_X(w) + \# ED_X(w) - 1$

De plus, $L \geq M \geq N$.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

00110022001100200110022001100011...

est ultimement dendrique de seuil 2.

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

00110022001100200110022001100011...

est ultimement dendrique de seuil 2.

On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

00110022001100200110022001100011...

est ultimement dendrique de seuil 2.

On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

- $\# R_X(02) \neq 3,$

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

00110022001100200110022001100011...

est ultimement dendrique de seuil 2.

On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

- $\# R_X(02) \neq 3$,
- $\langle R_X(02) \rangle = \langle 0, 11, 2 \rangle$ donc $R_X(02)$ n'engendre pas le groupe libre sur $\{0, 1, 2\}$,

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on perd

Le sous-shift X engendré par

00110022001100200110022001100011...

est ultimement dendrique de seuil 2.

On a

$$R_X(02) = \{0200110, 02200110, 022001100110, 0220011000110\}$$

donc

- $\# R_X(02) \neq 3$,
- $\langle R_X(02) \rangle = \langle 0, 11, 2 \rangle$ donc $R_X(02)$ n'engendre pas le groupe libre sur $\{0, 1, 2\}$,
- $R_X(02)$ n'est pas une base du sous-groupe qu'il engendre.

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est minimal et ultimement neutre de seuil N , alors
 $\# R_X(w) = p_X(N + 1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N .

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on garde

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est minimal et ultimement neutre de seuil N , alors $\# R_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N .

Proposition (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N , alors les sous-groupes $\langle R_X(w) \rangle$ sont conjugués pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N .

Ultime dendricité et mots de retour : ce qu'on garde

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est minimal et ultimement neutre de seuil N , alors $\# R_X(w) = p_X(N+1) - p_X(N) + 1$ pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N .

Proposition (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N , alors les sous-groupes $\langle R_X(w) \rangle$ sont conjugués pour tout $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur au moins N .

Corollaire (G., Goulet-Ouellet, Leroy, Stas)

Si X est minimal, ultimement dendrique et k -automatique, alors X est périodique.

Théorème (G., Leroy)

Tout dérivé d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique minimal.

Théorème (G., Leroy)

Tout dérivé d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique minimal.

Plus précisément, si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N , alors pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$, $D_w(X)$ est ultimement dendrique de seuil au plus $\max\{0, N - |w|\}$.

Théorème (G., Leroy)

Tout dérivé d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique minimal.

Plus précisément, si X est minimal et ultimement dendrique de seuil N , alors pour tout $w \in \mathcal{L}(X) \setminus \{\varepsilon\}$, $D_w(X)$ est ultimement dendrique de seuil au plus $\max\{0, N - |w|\}$.

Théorème (Dolce, Perrin)

Tout décodage bifixé maximal d'un sous-shift ultimement dendrique minimal est ultimement dendrique.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N , alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N - n + 1\}$.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N , alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N - n + 1\}$.

Proposition (Dolce, Perrin)

*Soit X un sous-shift et α un codage injectif sur X .
Si X est ultimement dendrique, alors $\alpha(X)$ est ultimement dendrique.*

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N , alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N - n + 1\}$.

Proposition (Dolce, Perrin)

*Soit X un sous-shift et α un codage injectif sur X .
Si X est ultimement dendrique, alors $\alpha(X)$ est ultimement dendrique.*

Théorème (Dolce, Perrin)

La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable par isomorphisme.

Ultime dendricité et stabilité : isomorphisme

Proposition (Dolce, Perrin)

Si X est ultimement dendrique de seuil N , alors pour tout $n \geq 2$, $X^{(n)}$ est ultimement dendrique de seuil $\max\{1, N - n + 1\}$.

Proposition (Dolce, Perrin)

Soit X un sous-shift et α un codage injectif sur X . Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\alpha(X)$ est ultimement dendrique.

Théorème (Dolce, Perrin)

La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable par isomorphisme.

Ultime dendricité et stabilité : morphismes reconnaissables

Tout morphisme se décompose de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{cases} a_i \mapsto \sigma(a)_i \\ b_j \mapsto \sigma(b)_j \\ \dots \end{cases} \circ \begin{cases} a \mapsto a_1 a_2 \cdots a_{|\sigma(a)|} \\ b \mapsto b_1 b_2 \cdots b_{|\sigma(b)|} \\ \dots \end{cases}$$

Ultime dendricité et stabilité : morphismes reconnaissables

Tout morphisme se décompose de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{cases} a_i \mapsto \sigma(a)_i \\ b_j \mapsto \sigma(b)_j \\ \dots \end{cases} \circ \begin{cases} a \mapsto a_1 a_2 \cdots a_{|\sigma(a)|} \\ b \mapsto b_1 b_2 \cdots b_{|\sigma(b)|} \\ \dots \end{cases}$$

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soit $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^$ un morphisme tel que chaque lettre de \mathcal{B} apparaît exactement une fois dans $\tau(\mathcal{A})$. Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\tau(X)$ est ultimement dendrique.*

Ultime dendricité et stabilité : morphismes reconnaissables

Tout morphisme se décompose de la façon suivante :

$$\sigma = \begin{cases} a_i \mapsto \sigma(a)_i \\ b_j \mapsto \sigma(b)_j \\ \dots \end{cases} \circ \begin{cases} a \mapsto a_1 a_2 \cdots a_{|\sigma(a)|} \\ b \mapsto b_1 b_2 \cdots b_{|\sigma(b)|} \\ \dots \end{cases}$$

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soit $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^$ un morphisme tel que chaque lettre de \mathcal{B} apparaît exactement une fois dans $\tau(\mathcal{A})$. Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\tau(X)$ est ultimement dendrique.*

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soit σ un morphisme reconnaissable sur X . Alors X est ultimement dendrique si et seulement si $\sigma(X)$ est ultimement dendrique.

Ultime dendricité et (in)stabilité : factorisation et morphismes

Proposition

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- *La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable pour l'application de morphismes.*
- *La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable pour l'application de codages.*
- *La famille des sous-shifts ultimement dendriques est stable pour la factorisation topologique.*

Ultime dendricité et (in)stabilité : factorisation et morphismes (2)

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soient X un sous-shift ultimement dendrique et σ un morphisme. Alors $\sigma(X)$ est ultimement dendrique si et seulement si $\sigma(X)$ est ultimement connexe.

Ultime dendricité et (in)stabilité : factorisation et morphismes (2)

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soient X un sous-shift ultimement dendrique et σ un morphisme. Alors $\sigma(X)$ est ultimement dendrique si et seulement si $\sigma(X)$ est ultimement connexe.

Proposition (G., Leroy, Stas)

Soient X un sous-shift ultimement dendrique et α un codage. Il existe N tel que, pour tout $v \in \mathcal{L}(\alpha(X))$ de longueur au moins N , si v n'est pas connexe, alors $\alpha^{-1}(v)$ contient uniquement des mots qui ont une unique bi-extension dans X .

Questions ouvertes

- La notion d'ultime dendricité est-elle stable pour l'application de morphisme/la factorisation topologique ?
- Peut-on être plus précis sur les propriétés des mots de retour dans un sous-shift ultimement dendrique ?
- Les sous-shifts dendriques sont-ils les seuls pour lesquels les mots de retour forment une base du groupe libre ?
- Que peut-on dire des classes d'isomorphie des sous-shifts ultimement dendriques ?

Questions ouvertes

- La notion d'ultime dendricité est-elle stable pour l'application de morphisme/la factorisation topologique ?
- Peut-on être plus précis sur les propriétés des mots de retour dans un sous-shift ultimement dendrique ?
- Les sous-shifts dendriques sont-ils les seuls pour lesquels les mots de retour forment une base du groupe libre ?
- Que peut-on dire des classes d'isomorphie des sous-shifts ultimement dendriques ?

Merci pour votre écoute !